

Drgania harmoniczne

O oscylatorze harmonicznym możemy mówić wtedy, kiedy siła hamująca działa proporcjonalnie do wychylenia z położenia równowagi. Równanie ruchu ma wtedy postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Pierwszy wyraz to zapisane różniczkowo przyspieszenie ciała a . W drugim wyrazie występuje wychylenie x oraz częstość drgań własnych ω_0 . Rozwiązanie takiego równania ma postać:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

gdzie ϕ – faza początkowa. Są to drgania okresowe, a okres drgań wynosi

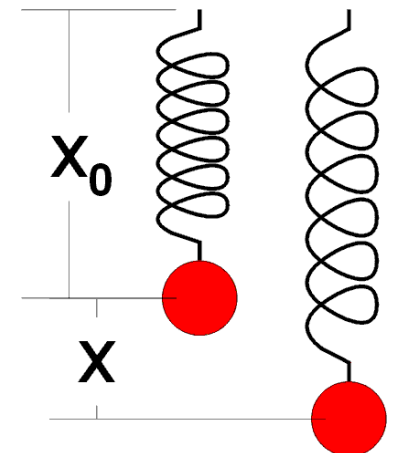
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Przykładem drgań harmoniczných jest ruch odważnika o masie m , zaczepionego do nieważkiej sprężyny o współczynniku sprężystości k . Równanie ruchu ma postać:

$$ma = -kx \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{gdzie } x - \text{wydłużenie sprężyny}$$

Porównując to równanie z równaniem oscylatora harmonicznego otrzymujemy częstość drgań własnych:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



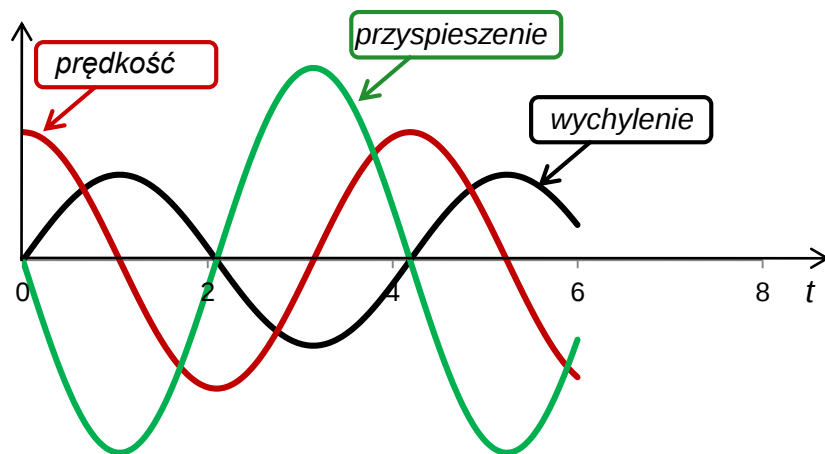
Prędkość i przyspieszenie w ruchu harmonicznym

Z równania ruchu harmonicznego $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ można wyznaczyć zależność prędkości od czasu

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

...a także zależność przyspieszenia od czasu

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$



Zależność wychylenia, prędkości i przyspieszenia od czasu

Energia w ruchu harmonicznym

Energię potencjalną w ruchu harmonicznym wyznaczamy, obliczając pracę, jaką trzeba wykonać, aby przesunąć ciało na odległość x z położenia równowagi. Przy przesuwaniu o odcinek dx wykonamy pracę:

$$dW = Fdx$$

Całkowita praca jest równa:

$$W = \int_0^x Fdx = \int_0^x (-kx)dx = \frac{kx^2}{2}$$

Energia potencjalna w ruchu harmonicznym:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Energia kinetyczna w ruchu harmonicznym:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2}$$

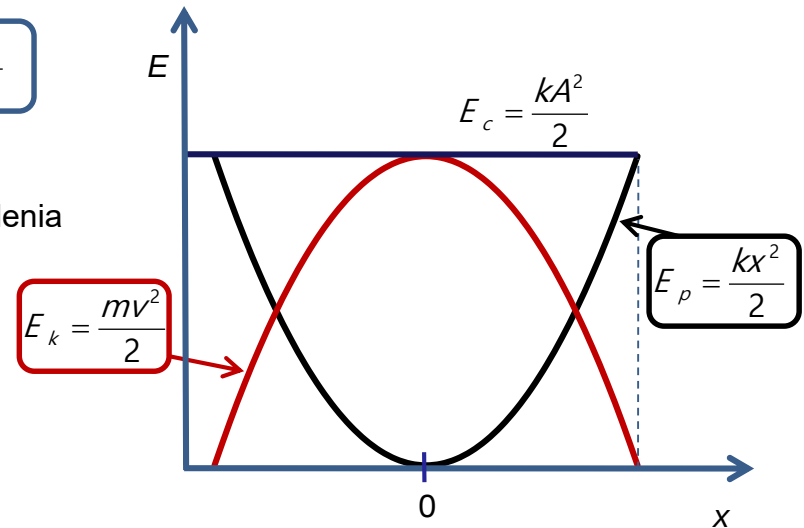
Energia całkowita w ruchu harmonicznym:

$$E_c = E_p + E_k = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2} + \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

Energia całkowita nie zależy od czasu – jest stała

$$E_c = \frac{kA^2}{2}$$

Zależność energii kinetycznej i potencjalnej od wychylenia



Wahadło matematyczne i fizyczne

Równanie ruchu dla wahadła matematycznego ma postać:

$$ma = -mg \sin \alpha$$

Po przeliczeniu przyspieszenia liniowego na kątowe, oraz zastosowaniu przybliżenia $\sin \alpha \approx \alpha$ dla małych kątów, otrzymujemy:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \alpha = 0$$

gdzie φ – przyspieszenie kątowe, lub
w zapisie różniczkowym:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha = 0$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, którego okres i częstotliwość wynoszą

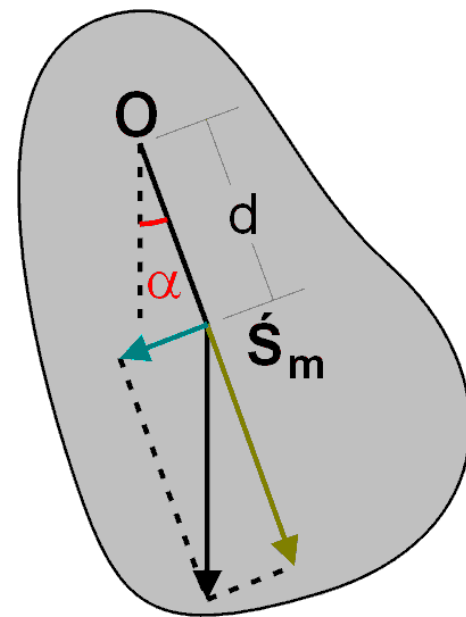
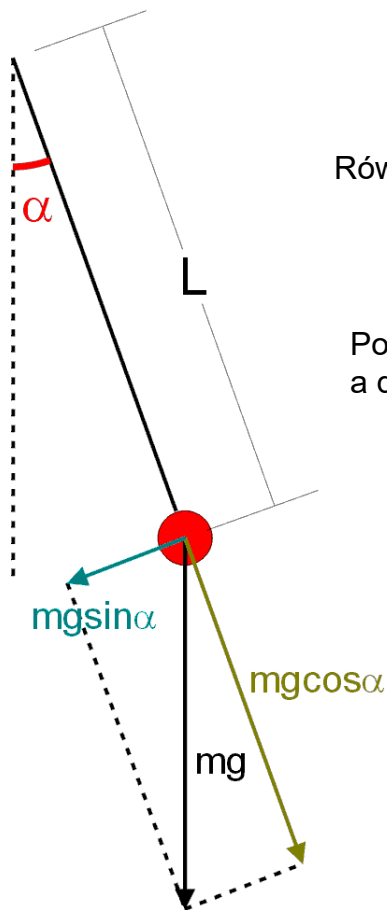
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Podobne obliczenia można przeprowadzić dla bryły sztywnej, zawieszanej na osi przechodzącej powyżej swojego środka masy. Otrzymujemy:

$$I \ddot{\varphi} + mgd \alpha = 0$$

gdzie I – moment bezwładności bryły względem wybranej osi, m – masa bryły, g – przyspieszenie ziemskie, d – odległość od wybranej osi do środka masy bryły.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$



Zadania

Zadanie 1.

Długość swobodna sprężyny zwisającej pionowo wynosi $L_0 = 10$ cm, a jej stała sprężystości k wynosi 100 N/m. Na sprężynie zawieszono kulkę o masie $m = 1$ kg a następnie puszczono swobodnie. Oblicz, jakie będzie najniższe i najwyższe położenie kulki. Podaj, gdzie znajduje się położenie równowagi takiego układu. Oblicz okres drgań.

Kiedy kulka zostaje zawieszona na sprężynie, ma energię potencjalną względem najniższego położenia. W najniższym położeniu energia ta zostaje zamieniona w energię sprężystości:

$$mgd = \frac{kd^2}{2}$$

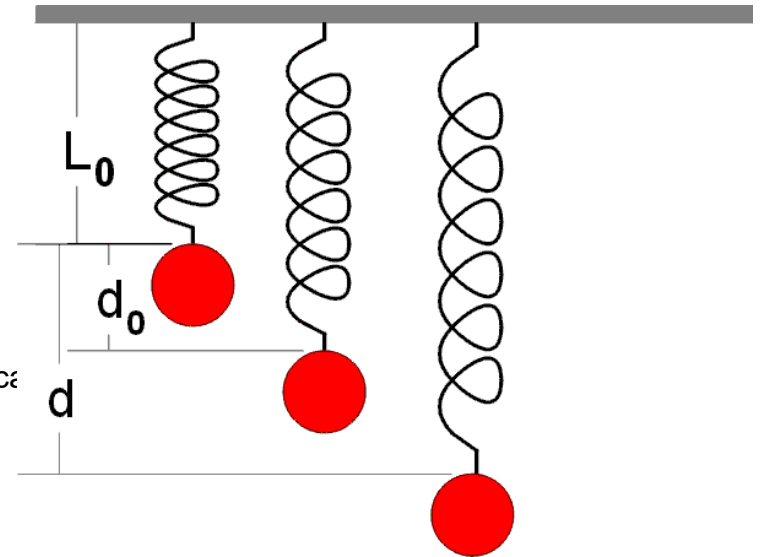
Równanie to ma dwa rozwiązania ze względu na d , które odpowiadają skrajnym położeniom ciężarka. Jedno rozwiązanie to $d=0$ – ciężarek wraca do położenia początkowego. Drugie rozwiązanie to

$$d = \frac{2mg}{k}$$

Po obliczeniu otrzymujemy $d = 0.2$ m. Zatem najniższe położenie kulki to $L_0 + d = 30$ cm.

Gdyby kulka wisiała swobodnie na sprężynie, siła sprężystości równoważyłaby siłę grawitacji. Pozwala to obliczyć wydłużenie równowagowe d_0 – położenie, wokół którego następują oscylacje.

$$mg = kd_0 \quad \text{Po obliczeniu otrzymujemy } d_0 = 0.1 \text{ m.}$$



Obliczamy okres:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Otrzymujemy wartość $T = 0.63$ s

Zadanie 2

Klocek o masie $m=1$ kg leży na gładkim stole i jest przyczepiony do ściany poziomą sprężyną o stałej sprężystości $k = 800$ N/m i długości swobodnej $L_0 = 20$ cm. Klocek o identycznej masie i prędkości $v = 4$ m/s poruszający się w kierunku ściany zderza się z nim niesprężysto. Na jaką minimalną odległość $L_{\min}$ zostanie ściśnięta sprężyna, a na jaką $L_{\max}$ rozciągnięta? Jaki będzie okres drgań po zderzeniu?

Zderzenie jest niesprężyste i klocki łączą się ze sobą. Korzystamy z zasady zachowania pędu by obliczyć wspólną prędkość klocków po zderzeniu.

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$$

Ponieważ w zadaniu $m_1 = m_2$, to $u=v/2 = 2$ m/s

Energia kinetyczna klocków po zderzeniu zmieni się całkowicie w energię sił sprężystych w skrajnych położeniach - jeśli sprężyna zostanie maksymalnie ściśnięta bądź rozciągnięta (wtedy $u=0$)

$$\frac{2mu^2}{2} = \frac{kd^2}{2}$$

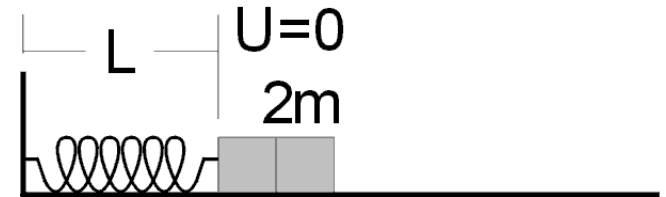
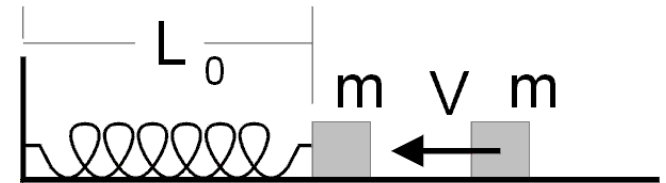
gdzie d – amplituda drgań.

Po przekształceniach otrzymujemy $d_1 = 0.1$ m i $d_2 = -0.1$ m. Sprężyna zostanie ściśnięta na odległość $L_0+d_2 = 10$ cm, a rozciągnięta na odległość $L_0+d_1 = 30$ cm.

Okres drgań obliczymy ze wzoru:

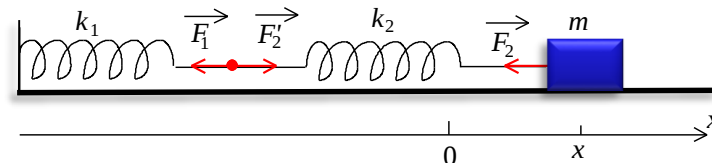
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

T wynosi 0.314 s



Zadanie 4

Obliczyć okres drgań układu przedstawionego na rysunku.
Zaniedbać opór powietrza i tarcie.



Po wychyleniu klocka z położenia równowagi do położenia x pierwsza sprężyna wydłuży się o d_1 a druga o d_2 , przy czym:

$$d_1 + d_2 = x$$

$$F_1 = -k_1 d_1$$

$$F_2 = -k_2 d_2$$

Ruch klocka będzie się odbywać pod wpływem siły $\vec{F}_2$. W miejscu połączenia sprężyn działają siły $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2'$. Ich wartości są równe, zatem: $k_1 d_1 = k_2 d_2$

Z układu równań:

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = x \\ k_1 d_1 = k_2 d_2 \end{cases}$$

obliczamy: $d_2 = \frac{k_1 x}{k_1 + k_2}$, a następnie $F_2 = -k_2 d_2 = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x$

Z porównania ze wzorem na siłę harmoniczną wynika, że $k^* = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$, zatem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

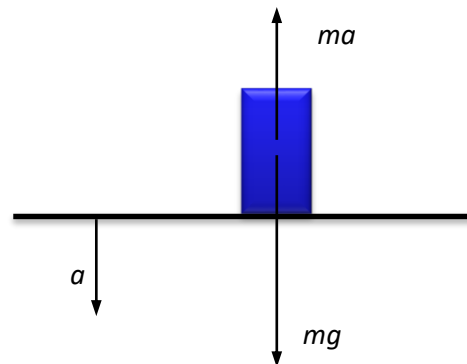
Zadanie 5

Płaska podstawka porusza się ruchem harmonicznym pionowym. Na tej podstawie leży odważnik. Jaka może być maksymalna amplituda tych drgań, aby odważnik nie odrywał się od podstawki? Okres drgań podstawki i odważnika wynosi T , a przyspieszenie ziemskie g .

Odważnik znajduje się w układzie nieinercyjnym (podstawka porusza się z przyspieszeniem różnym od zera), działa więc na niego siła bezwładności zawsze skierowana przeciwnie do zwrotu przyspieszenia podstawki. Odważnik może oderwać się od podstawki, jeśli przyspieszenie będzie skierowane w dół i osiągnie maksymalną wartość (podstawka będzie w najwyższym położeniu). Zapisujemy równanie ruchu harmonicznego:

$$x = A \cos \omega t$$

stąd:
$$a = -A\omega^2 \cos \omega t$$



Wartość maksymalna przyspieszenia wynosi: $a_{max} = A\omega^2$

Odważnik nie oderwie się od podstawki, jeśli: $ma_{max} \leq mg$

$$A\omega^2 \leq g$$

$$A \leq \frac{g}{\omega^2}$$

ponieważ $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$A \leq \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Zadanie 6

Drewniany sześcian o krawędzi a i gęstości ρ_2 pływa na powierzchni wody (gęstość ρ_1). Sześcian popchnięto w dół i zaczął wykonywać drgania. Wykazać, że są to drgania harmoniczne i obliczyć okres drgań.

W położeniu równowagi (1) siły wyporu i ciężkości równoważą się.

W położeniu (2) działa niezrównoważona siła wyporu:

$$F = -xa^2\rho_2g$$

Siła jest wprost proporcjonalna do wychylecia x i przeciwnie skierowana.

Jest to więc ruch harmoniczny o współczynniku:

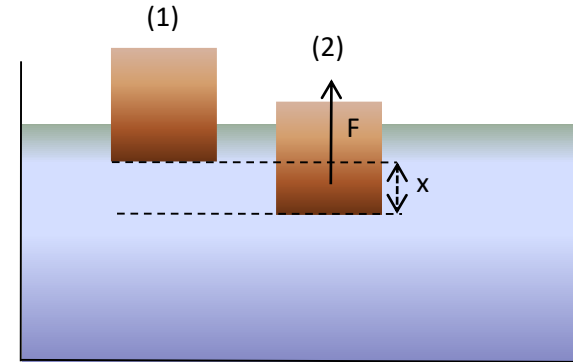
$$k = a^2\rho_2g$$

Teraz możemy obliczyć częstotliwość drgań własnych:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{\rho_2g}{a\rho_1}$$

A następnie okres drgań:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_1a}{\rho_2g}}$$



Wahadło fizyczne

Zadanie 5

Sztywny, cienki pręt o długości $L = 1$ m i masie $m = 5$ kg zawieszono na prostopadłej osi, przecinającej go w $\frac{1}{4}$ długości. Jaki jest okres drgań takiej bryły? Jak zmieni się okres po przeniesieniu osi na koniec pręta?

Okres wahadła fizycznego wyrażony jest wzorem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Mamy zatem do wyliczenia dwie niewiadome: moment bezwładności I i odległość od osi do środka masy d .

Moment bezwładności wyliczamy z twierdzenia Steinera:

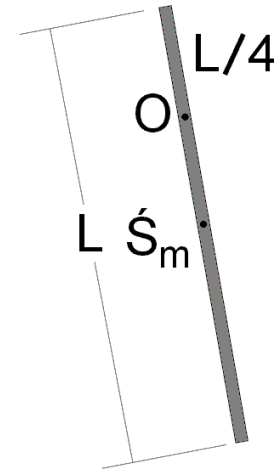
$$I = I_0 + mx^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{16} = \frac{7}{48}mL^2$$

gdzie $x = \frac{1}{4}L$ oznacza równoległe przesunięcie osi względem osi związanej ze środkiem masy pręta, dla której moment bezwładności $I_0 = mL^2/12$

Widzimy również, że szukane $d = \frac{1}{4}L$, gdyż taka jest odległość między środkiem masy pręta a wybraną osią. Zatem szukany okres:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{48}mL^2}{mg \frac{1}{4}L}} = 2\pi \sqrt{\frac{7 \cdot 4L}{48g}}$$

Okres jest niezależny od masy pręta i wynosi 1.51s (g przyjęto jako 10 m/s^2).



Jeśli oś przeniesiemy na koniec pręta, otrzymamy:

$$I = \frac{mL^2}{3}$$

oraz $d = \frac{1}{2}L$

Okres wynosi w tym przypadku 1.62 s.

Wahadło fizyczne

Zadanie 6

Sztywny, cienki pręt o długości $L = 1$ m i masie $m = 4$ kg zawieszono na prostopadłej osi, przechodzącej przez koniec pręta. Na jego drugim końcu zawieszono ołowianą kulkę o masie $M = 2$ kg. Jaki jest okres drgań takiej bryły? Kulkę potraktuj jako masę punktową.

Podobnie jak poprzednio, korzystamy ze wzoru na okres wahadła fizycznego $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$

Obliczamy moment bezwładności bryły względem osi. Jest on sumą momentów bezwładności pręta i kulki.

$$I = I_P + I_K \quad I_P = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3} \quad I_K = ML^2$$

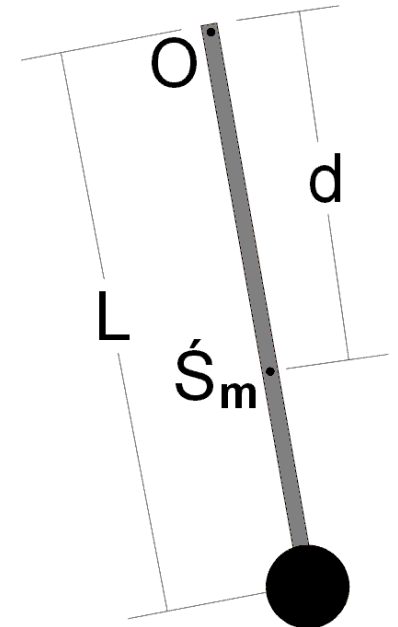
Żeby obliczyć odległość d , musimy znać położenie środka masy bryły. Początek układu wygodnie jest przyjąć w osi.

$$R_{\dot{sm}} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\frac{L}{2}m + LM}{m + M}$$

Środek masy znajduje się w odległości $\frac{2}{3}L$ od osi i taką przyjmujemy odległość d .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{mL^2}{3} + ML^2}{(m + M)g \frac{2}{3}L}}$$

Obliczony okres T wynosi 1.81 s.



Wahadło fizyczne

Zadanie 7

Jaki jest okres wahań jednorodnej kuli o masie $m=0,5$ kg i promieniu $R=1$ m zawieszanej na małym haczyku wbitym w jej powierzchnię? Na jak długim sznurku trzeba by zawiesić małą kulkę o takiej samej masie m , aby wahała się z taką samą częstotliwością?

Moment bezwładności kuli względem punktu zawieszenia (z twierdzenia Steinera):

$$I = I_0 + mR^2$$

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

Ze wzoru na okres wahadła fizycznego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{7mR^2}{5mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{5g}} = 2,35[s]$$

Okres wahadła matematycznego ma być równy okresowi wahadła fizycznego:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{7R}{5g}} \Rightarrow l = \frac{7}{5}R = 1,4[m]$$

*Ta długość jest nazywana **długością zredukowaną wahadła fizycznego**.*

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Model zawieszenia samochodu jest płaską płytą o masie $m=1000$ kg, podpartą czterema identycznymi sprężynami. Jakie muszą być ich stałe sprężystości, aby częstotliwość drgań wynosiła 1 Hz (zakładamy, że płyta drga jedynie w płaszczyźnie pionowej)?

Odp.: 250 N/m

2. Na szczycie gładkiej równi pochyłej, nachylonej pod kątem 30° do poziomu przymocowano sprężynę o długości swobodnej $L = 0,5$ m i stałej sprężystości 100 N/m, a do niej zaczepiono ciężarek o masie $m = 1$ kg. Oblicz: a) gdzie znajduje się położenie równowagowe, b) odległość od szczytu równi do najniższego punktu, do którego sięga ciężarek w trakcie drgań, c) okres drgań

Odp.: a) 55 cm od szczytu równi, b) 60 cm od szczytu równi, c) 0,628 s

3. Do sprężyny, zawieszanej na suficie o długości początkowej $L = 0,3$ m zaczepiono ciężarek, który po swobodnym puszczeniu wykonuje drgania o amplitudzie 0,1 m. Kiedy zaczepiono drugi ciężarek o masie $m = 1$ kg, okres drgań wyniósł 1 s. Ile wynosi stała sprężystości sprężyny i masa pierwszego ciężarka?

Odp.: $m_x = 0,65$ kg, $k = 65$ n/m

4. Okres drgań wahadła składającego się z cienkiej, nieważkiej nitki o długości L i ciężarka wynosi T . Jak należy dobrać długość nici by uzyskać okres drgań: a) dwa razy dłuższy, b) trzykrotnie krótszy?

Odp.: a) $L' = 4L$, b) $L' = L/9$

5. Oblicz okres drgań dysku o średnicy $D = 1$ m, zawieszanego na osi przechodzącej przez jego krawędź prostopadle do płaszczyzny dysku.

Odp.: $T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{6D}{g}} = 1,2$ s

6. Wahadło zegarowe wykonano zaczepiając dysk o masie $m_2 = 2$ kg i średnicy $L_2 = 0,2$ m do końca pręta o długości $L_1 = 1$ m i masie $m = 1$ kg tak, że środek dysku znajduje się na końcu pręta, a jego płaszczyzna jest równoległa do pręta. Oblicz okres drgań bryły, jeśli oś obrotu umieścimy w połowie długości pręta, prostopadle do płaszczyzny dysku.

Odp. $T = 1,6$ s

7. Kulka o masie $m = 0,1 \text{ kg}$ zaczepiona na sprężynie wykonuje drgania harmoniczne. Zależność jej prędkości od czasu opisuje wzór: $v(t) = 10 \frac{m}{s} \cos(6s^{-1} \cdot t)$ Jak zależy od czasu energia kinetyczna i potencjalna kulki? Oblicz największą energię kinetyczną, jaką osiąga kulka, jaka wtedy będzie energia potencjalna siły sprężystości?

$$\text{Odp.: } E_k(t) = 5J - \cos^2(6s^{-1} \cdot t) \quad E_p(t) = 5J(1 - \cos^2(6s^{-1} \cdot t)) \quad E_{k \max} = 5J \quad E_p = 0$$

8. W U-rurce o przekroju S znajduje się słup wody o długości l . Po wychyleniu z położenia równowagi słupek cieczy zaczął wykonywać drgania. Wykaż, że są to drgania harmoniczne i znajdź okres drgań.

$$\text{Odp.: } k = \rho g S \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

9. Położenie ciała wykonującego drgania harmoniczne opisuje wzór : $x(t) = A \cos(\omega t)$, gdzie $A = 2 \text{ m}$. $\omega = 0,2 \text{ s}^{-1}$. Jaka jest największa prędkość ciała?

$$\text{Odp.: } v = 0,4 \text{ m/s}$$

10. Okres drgań ciała o masie $m = 10 \text{ g}$ zaczepionego na sprężynie wynosi $T = 2 \text{ s}$. Amplituda drgań równa jest $A = 20 \text{ cm}$. Znaleźć współczynnik sprężystości sprężyny i maksymalną prędkość ciała.

$$\text{Odp.: } k = 0,1 \text{ N/m}, v_{\max} = 0,628 \text{ m/s}$$